

Spektrální analýza signálu

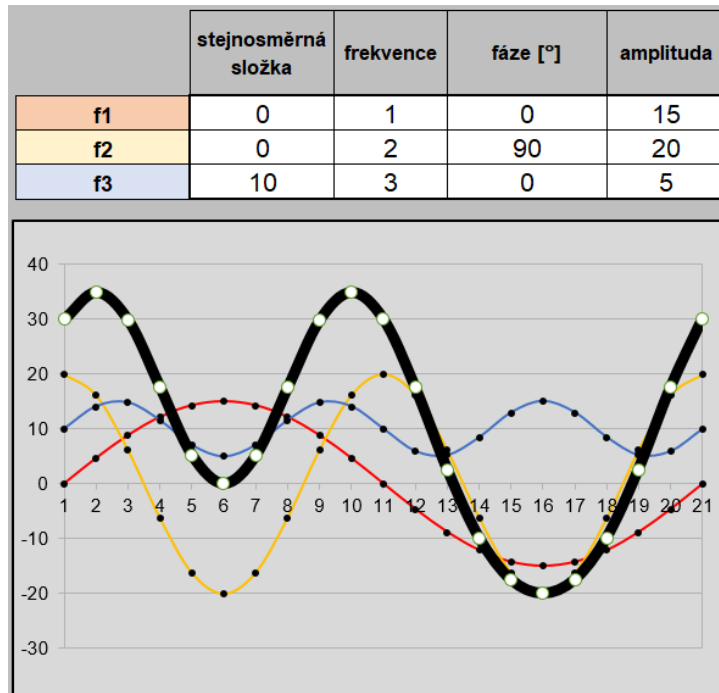
Fourierova harmonická analýza

jak to * funguje

1. Teorie harmonické analýzy

Harmonická analýza představuje vyjádření signálu z původní formy závislé na čase na frekvenčně závislý tvar. Tedy způsob jak z periodického signálu zjistit zastoupení jednotlivých harmonických kmitočtů.

Na obr. 1 je příklad kde je "černá" funkce součtem "červené f1", "žluté f2" a "modré f3" v oblasti jedné periody signálu, tj. periody 1. harmonické, tedy periody funkce s nejnižším sledovaným kmitočtem. Na tomto příkladu je to funkce "červená f1" s relativní frekvencí $f_1 = 1$



Obr. 1: Příklad skládání kmitočtu

Vyjádření je provedeno pomocí harmonických signálů funkcí SINus a COSinus. Základem pro tuto analýza je Fourierova věta:

Každá jednoznačně určená periodická funkce $F(t)$ s opakovací periodou T a opakovacím kmitočtem $f_0 = \frac{1}{T}$, která má v intervalu T konečný počet extrémů a nespojitostí, může být vyjádřena nekonečnou goniometrickou řadou ve tvaru $f_t = a_0 + a_1 \cos(\omega_0 t) + \dots + a_n \cos(\omega_0 t) + b_1 \sin(\omega_0 t) + \dots + b_n \sin(\omega_0 t)$

- ω je úhlový kmitočet odpovídající $2\pi f$ a vyjadřuje, kolikrát za dobu 1 sekundy dojde k otočení fázoru po obvodu celé kružnice
- člen a_0 je střední hodnotou funkce za dobu periody T a představuje tzv. stejnosměrnou složku
- další členy představují tzv. sinusové a kosinusové složky Fourierova rozvoje, jejich kmitočty jsou celistvé násobky opakovacího kmitočtu
- proměnné $a_1 \dots a_n$ a $b_1 \dots b_n$ se nazývají Fourierovy součinitele

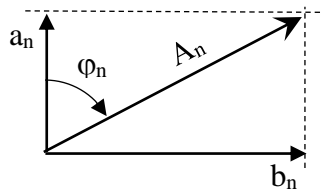
Podmínky, za kterých je možno takto s funkcí pracovat se nazývají Dirichletovy podmínky a jsou exaktně určeny takto:

1. $f(t)$ je periodická funkce
2. uvnitř zadaného intervalu (jedné periody) musí být $f(t)$ alespoň po částech spojitá
3. uvnitř daného intervalu musí mít $f(t)$ konečný počet extrémů
4. $f(t)$ musí být definována v krajních bodech intervalu, které nabývají konečných hodnot

Dvojice členů goniometrické řady se stejným indexem lze spojit v jeden člen. V případě indexu "1" jde o první harmonickou. Podobné tomu je u vyšších harmonických složek.

$$a_1 \cos(\omega_0 t) + b_1 \sin(\omega_0 t) = A_1 \cos(\omega_0 t - \varphi_1)$$

Graficky lze situaci vyjádřit pomocí fázorů:



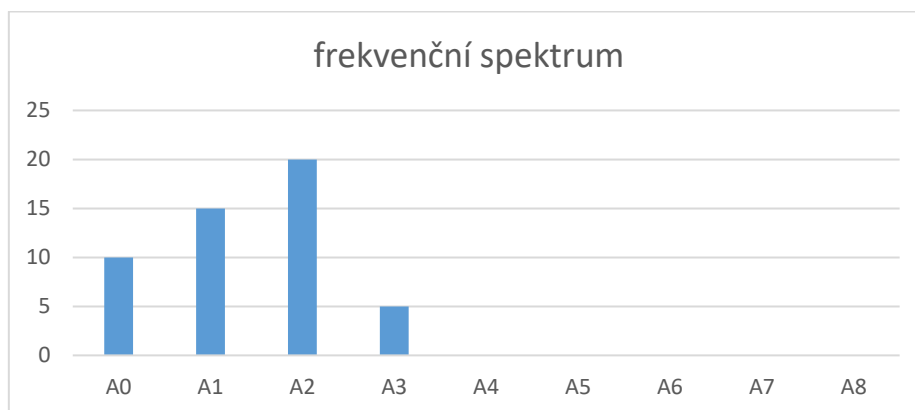
Z fázorového diagramu lze odvodit vzájemné souvislosti:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\varphi_n = \arctg \frac{b_n}{a_n}$$

$$a_n = A_n \cos \varphi_n \quad b_n = A_n \sin \varphi_n$$

Matematická metoda harmonické analýzy předpokládá dostupnost analytického vyjádření zkoumané funkce. To je proto v praxi nepoužitelné a musí být využita některá z forem numerických metod. Výsledkem takové analýzy může být např. grafické vyjádření frekvenčního spektra pomocí sloupcového grafu, viz obr. 2, kde výška jednotlivých sloupců představuje amplitudu příslušné harmonické složky.



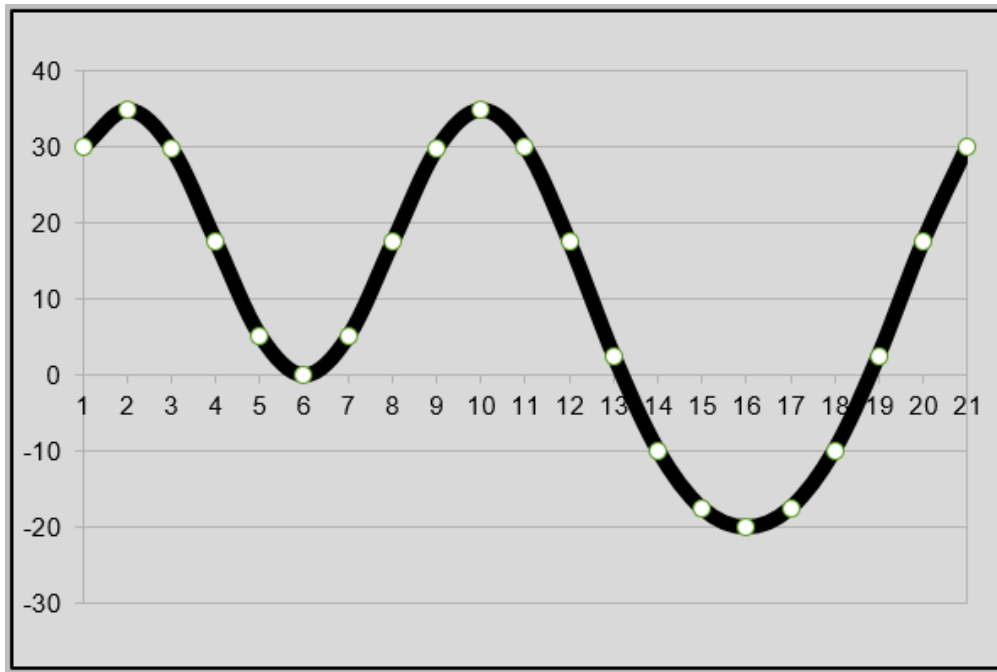
Obr. 2: Grafické vyjádření frekvenčního spektra signálu

2. Numerická metoda harmonické analýzy

Metoda využívá naměřených hodnot v čase, které odpovídají okamžitým úrovním signálu. Tato data musí být vzorkovaná kmitočtem, který odpovídá Nyquist-Shannon-Kotelnikovu teorému:

„přesná rekonstrukce spojitého, frekvenčně omezeného signálu z jeho vzorků je možná tehdy, pokud byla vzorkovací frekvence vyšší než dvojnásobek nejvyšší harmonické složky vzorkovaného signálu“

Nejprve musí být tedy rozhodnuto o periodě signálu. Periodu (otočení fázoru po obvodu celé kružnice) o délce 2π rozdělíme na "c" stejných dílků, kdy $c \geq 2n + 2$. Šířka vzorkování $\Delta\alpha = \frac{2\pi}{c}$. V tomto intervalu se použije hodnota např. z počátku intervalu (na vzestupné hraně vzorkovacího impulzu).



Obr. 3: Vzorkovaný signál

V příkladu signálu na obr. 3 byla zvolena perioda odpovídající šířce záběru obrázku. Z tohoto intervalu bylo vytěženo 20 vzorků. Vzorek č. 21 odpovídá svou hodnotou vzorku č. 1 a nebude s ním počítáno, protože patří do intervalu následující periody. Naměřené hodnoty byly zaokrouhleny pro názornost na celá čísla. K zaokrouhlování došlo i v následujících praktických výpočtech.

Naměřené hodnoty tvoří řadu dat:

vzorek č.	hodnota
1	30
2	35
3	30
4	18
5	5
6	0
7	5
8	18
9	30
10	35

vzorek č.	hodnota
11	30
12	18
13	3
14	-10
15	-18
16	-20
17	-18
18	-10
19	3
20	18

Obecné vztahy pro Fourierovy součinitele harmonických složek jsou:

$$a_n = \frac{2}{c} \sum_{k=1}^{k=c} y_k \cos(n \alpha_k)$$

$$b_n = \frac{2}{c} \sum_{k=1}^{k=c} y_k \sin(n \alpha_k)$$

Jde tedy v principu o eliminační porovnávání skutečných hodnot s těmi, které bychom předpokládali, pokud by harmonická složka byla v signálu zastoupena.

Pro stejnosměrnou složku platí:

$$a_0 = \frac{1}{c} \sum_{k=1}^{k=c} y_k$$

Pro výpočet amplitudy a fáze harmonické složky použijeme odvozeného vztahu:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\varphi_n = \arctg \frac{b_n}{a_n}$$

3. Výpočet harmonických složek signálu

Ve výše uvedeném příkladu signálu na obr. 3 bude použito $c = 20$ jelikož je použito 20 vzorků v periodě a zkoumaná harmonická složka "n" bude v jednotlivých výpočtech nabývat příslušné hodnoty. Pro 1. harmonickou bude např. $n=1$.

Naměřené hodnoty: [30; 35; 30; 18; 5; 0; 5; 18; 30; 35; 30; 18; 3; -10; -18; -20; -18; -10; 3; 18]

3.1 Výpočet stejnosměrné složky

$$a_0 = \frac{1}{20} \sum_{k=1}^{k=20} y_k$$

$$a_0 = \frac{1}{20} * (30 + 35 + 30 + 18 + 5 + 0 + 5 + 18 + 30 + 35 + 30 + 18 + 3 - 10 - 18 - 20 - 18 - 10 + 3 + 18)$$

$$a_0 = 0,05 * 200$$

$$a_0 = 10$$

3.2 Výpočet součinitele "a"

Výraz $\frac{2\pi}{20} * (k - 1)$ v následujících vzorcích odpovídá natočení fázoru pro daný krok výpočtu v rámci jedné periody, kdy proběhne otočení tohoto fázoru po celém obvodu kružnice. Výpočet goniometrických funkcí probíhá v RADiánech.

$$a_1 = \frac{2}{20} \sum_{k=1}^{k=20} y_k \cos\left(1 * \frac{2\pi}{20} * (k - 1)\right)$$

$$a_1 = \frac{2}{20} * [(30 * \cos(1 * 0,314 * 0)) + (35 * \cos(1 * 0,314 * 1)) + (30 * \cos(1 * 0,314 * 2) + \dots]$$

$$a_1 = 0,1 * [30 + 33,15 + 24,07 + \dots]$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = \frac{2}{20} \sum_{k=1}^{k=20} y_k \cos\left(2 * \frac{2\pi}{20} * (k - 1)\right)$$

$$a_2 = \frac{2}{20} * [(30 * \cos(2 * 0,314 * 0)) + (35 * \cos(2 * 0,314 * 1)) + (30 * \cos(2 * 0,314 * 2) + \dots]$$

$$a_2 = 0,1 * [30 + 28,20 + 9,19 + \dots]$$

$$a_2 = 20$$

3.3 Výpočet součinitele "b"

$$b_1 = \frac{2}{20} \sum_{k=1}^{k=20} y_k \sin\left(1 * \frac{2\pi}{20} * (k - 1)\right)$$

$$b_1 = \frac{2}{20} * [(30 * \sin(1 * 0,314 * 0)) + (35 * \sin(1 * 0,314 * 1)) + (30 * \sin(1 * 0,314 * 2) + \dots]$$

$$b_1 = 0,1 * [0 + 10,77 + 17,49 + \dots]$$

$$b_1 = 15$$

$$b_2 = \frac{2}{20} \sum_{k=1}^{k=20} y_k \sin\left(2 * \frac{2\pi}{20} * (k - 1)\right)$$

$$b_2 = \frac{2}{20} * [(30 * \sin(2 * 0,314 * 0)) + (35 * \sin(2 * 0,314 * 1)) + (30 * \sin(2 * 0,314 * 2) + \dots]$$

$$b_2 = 0,1 * [0 + 20,49 + 28,3 + \dots]$$

$$b_2 = 0$$

3.4 Výpočet amplitudy 1. harmonické

$$A_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$$

$$A_1 = \sqrt{0 + 15^2}$$

$$A_1 = 15$$

Výška amplitudy je relativní hodnota v jednotkách, ve kterých bylo provedeno měření vstupních hodnot.

3.5 Výpočet fázového posunu 1. harmonické

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{b_1}{a_1}$$

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{15}{0,0000000001}$$

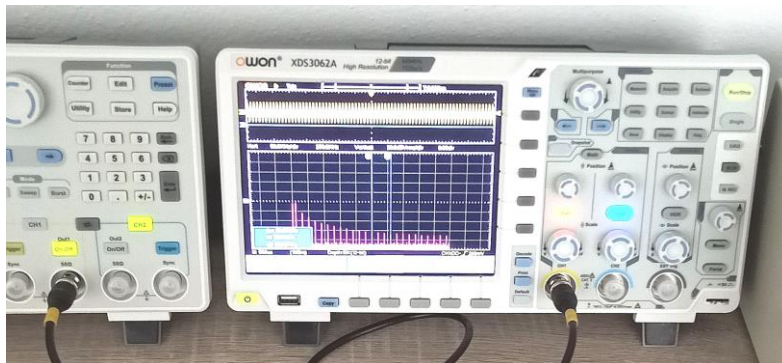
Pokud je součinitel a_n roven nule, nebo by měl být na nulovou hodnotu zaokrouhlen, musí být nahrazen zanedbatelně malým číslem různým od nuly, např. 0,0000000001. Tím se předejde dělením nulou, které není možné provést.

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

Fázový posun udává úhel posunutí harmonické složky od průběhu funkce COSinus. Výše uvedená 1. harmonická má ve vzorkované periodě podobu funkce SINus s počátkem v nule.

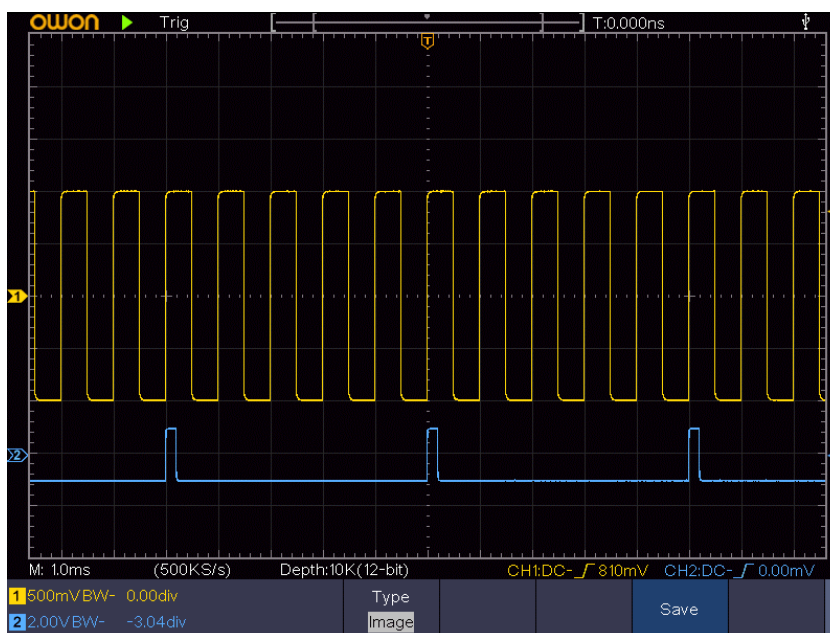
4. Přístrojová analýza

Složitější průběhy signálů je vzhledem k množství obsažených harmonických složek potřeba vzorkovat daleko podrobněji. Speciální přístroje, jako jsou digitální osciloskopy a analyzátoři, používají ke zpracování naměřených dat "Rychlou Fourierovu Transformaci" angl. Fast Fourier Transform, zkráceně FFT. Jedná se o účinný algoritmus, pomocí kterého lze efektivně zpracovat v reálném čase velké množství dat.



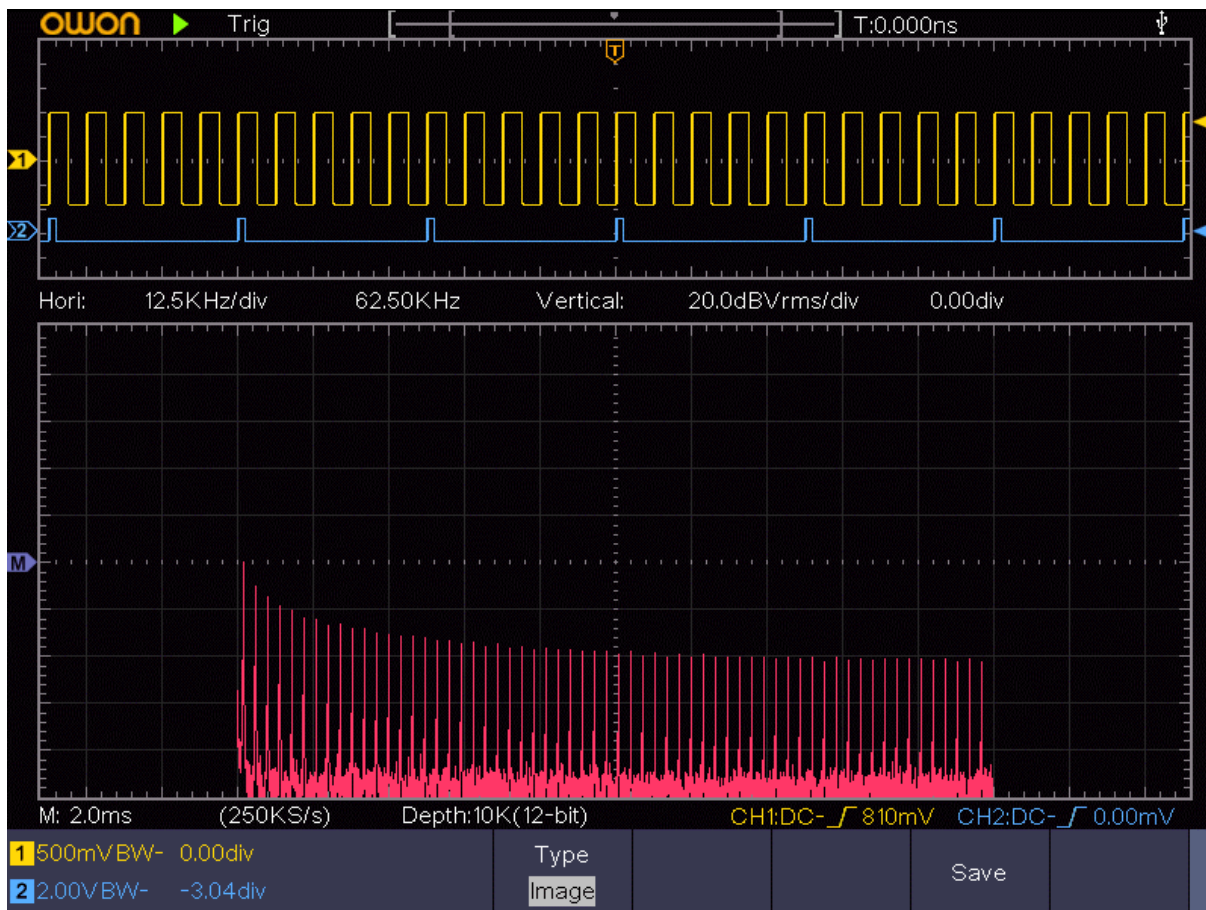
Obr. 4: Pracoviště s osciloskopem s podporou FFT

Na obr. 5 je obrazovka osciloskopu s průběhem obdélníkového signálu a kontrolního impulsního signálu s 5-ti násobnou frekvencí. Pro "žlutý" signál je nastavena velikost dílky na 500 mV a při výšce 4 dílky má amplitudu 2Vpp (peak-peak). Frekvenci lze odvodit z šířky dílky, která je 1,0 ms, což odpovídá 1kHz.

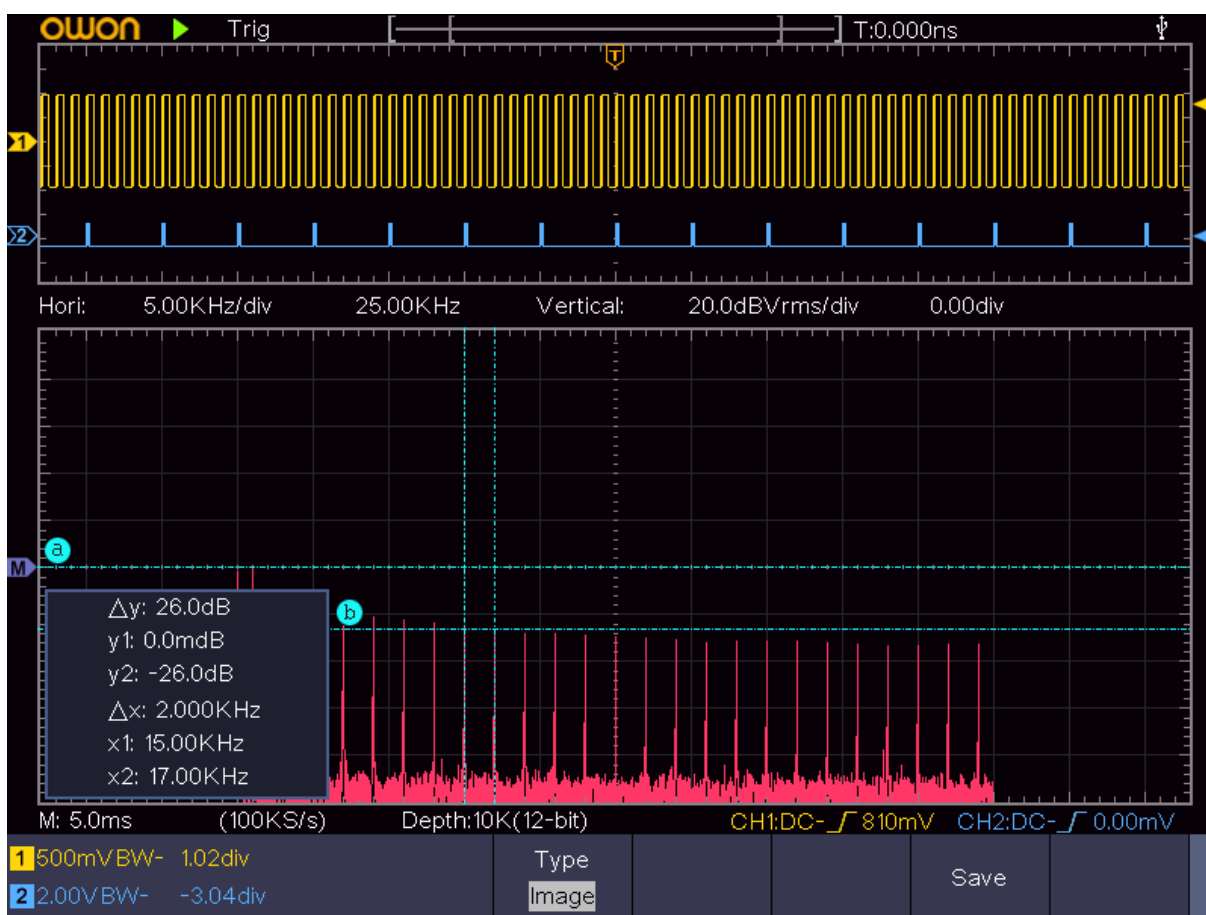


Obr. 5: Obrazovka osciloskopu s průběhem obdélníkového signálu

Na obr. č. 6 je provedena analýza FFT, ze které je patrné zastoupení vyšších harmonických kmitočtů. Na obr. č. 7 je pomocí kurzoru odečtena hodnota rozestupu vyšších harmonických složek a jejich amplituda.



Obr. 6: Obrazovka osciloskopu s analýzou FFT



Obr. 7: Obrazovka osciloskopu s analýzou FFT a základním měřením

Použité zdroje

[1] Fourierova transformace – Wikipedie. [online]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Fourierova_transformace

[2] Nyquistův–Shannonův vzorkovací teorém – Wikipedie. [online]. Dostupné z:

https://cs.wikipedia.org/wiki/Nyquist%C5%AFv%E2%80%93Shannon%C5%AFv_vzorkovac%C3%AD_teor%C3%A9m

[3] Dirichletovy podmínky – Wikipedie. [online]. Dostupné z:

https://cs.wikipedia.org/wiki/Dirichletovy_podm%C3%ADnky

[4] MAŽÁTKO, Jan a Eva FOITOVÁ. Elektronika pro 3. ročník SPŠE slaboproudých: elektronické součástky a základní obvody: učební text pro 3. ročník SPŠE studijních odobř 26-62-6 Sdělovací a radioelektronická zařízení a 26-63-6 Měřicí a automatizační technika. Dotisk 2. nezm. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1981.